МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. ДЕМ'ЯНЧУКА

Р. М. Літнарович

Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО

Частина 1

м. Рівне, 2006

13.Савельев И.В. Курс физики. Т.2. – М.: наука, 1989, - 464с.
14.Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: наука, 1982, - 304с.
15.Ситніков О.П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003, - 48с.
16.Суботін С.І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1966, - 39с.
17.Топографо-геодезические термины: Справочник / Б.С.Кузьмин, Ф.Я. Герасимов, В.М. Молоканов и др.. – М.: Недра, 1989, -261с.
18.Федоров Є.П. Обертання Землі. –К.: Знання, 1966, - 52с.
19.Фізика з використанням обчислювальної техніки.
Практичний курс. / В.М.Казанський, В.І. Клапченко,
І.Д.Кошелєва та інші. – К.: Либідь, 1993, -224с.

УДК 629.123.053.12

Літнарович Р.М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006, - 44 с.
Рецензенти: В.Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Розроблена методика дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО.

Дослідження проводяться методом найменших квадратів побудовою поліному третьої степені з встановленням ваг і знаходженням середньої квадратичної похибки виведених коефіцієнтів.

Формулюється ряд теорем, які полегшують проведення досліджень.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

Р.М.Літнарович

The method of research of exactness of approximation of dependence of magnetic moment of earth is developed from a geomagnetical breadth by the method of statistical tests of MONTE KARLO.

Researches are conducted a least-squares method by a construction to the polynomial of the third degrees with establishment of vag and finding of middle quadratic error of the shown out coefficients.

The row of theorems which facilitate the leadthrough of researches is formulated.

For students and graduate students of pedagogical faculties.

R.M.Litnarovich

ЗМІСТ

Література

1. Кронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, - 975с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973, 831с.
3. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по елементарной физике. М.: Наука, 1972, -255с.
4. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. - К.: техніка, 1999, -536с.
5. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики Т.2. - К.: техніка, 2001, -452с.
6. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики Т.3. - К.: техніка, 1999, -520с.
7. Літнарович Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією. Навчальний посібник. Частина 7. МЕГУ, Рівне, 2006, -20с.
8. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Сов.радио, 1976, - 192с.
9. Пастушенко С.М. Формули і закони загальної фізики: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -268с.
10. Рего К.Г.Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. –К.: техніка, 1987, -126с.
11. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухова, Стрижевський В.Л., Цвілих М.Г. та інші. К.: Радянська школа, 1966, -503с.
12. Савельев И.В. Курс физики. Т.1. – М.: наука, 1989, - 352с.

результати вихідних параметрів x і y.

10. В результаті досліджень встановлено, що при цьому отриманий коефіцієнт a із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у K^2 разів, коефіцієнт b слід зменшити у K разів, коефіцієнт c і d слід залишити без зміни.
11. Доведено, що при коефіцієнті масштабування вихідних параметрів K вагу коефіцієнта a необхідно збільшити у $(K^2)^3$, а вагу коефіцієнта d слід збільшити у K^2 раз.

    Коефіцієнти $[xx{\cdot}2]$ і $[x^{\circ}x^{\circ}{\cdot}2]$ для визначення ваги Pb необхідно збільшити у $к^2$ раз.

    Коефіцієнт $[x^2x^2{\cdot}2]$ необхідно збільшити у $(к^2)^2$ раз а коефіцієнт $[x^3x^3{\cdot}2]$ слід збільшити у $(к^2)^3$ раз для визначення ваги Pc коефіцієнта c.
12. Проведені дослідження дають можливість організувати широкомасштабні дослідження точності визначення магнітного моменту Землі методом статистичних випробувань Монте Карло.
13. Розроблені програми для організації обчислень на мікроЕОМ.
14. Розроблені генератори випадкових чисел і побудовані перші спотворені моделі.

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на питання: коли і як зародилось магнітне поле земної кулі? Чому воно існує міліарди років? Як це поле буде змінюватися в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі – ***магнітний момен***т планети графічно і встановить функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається за істинну модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель і будується спотворена модель.

В подальшому методом найменших квадратів зрівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності зрівноважених елементів. Знання істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить робити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці Планети Земля.

1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\varphi_{маг.екв.} = 0$. При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

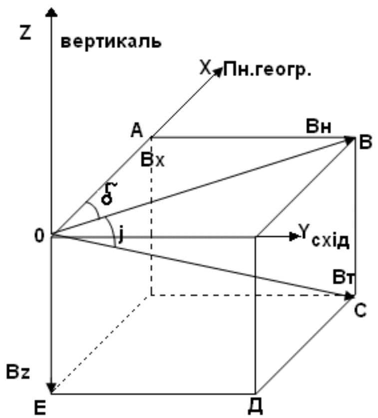

Рис. 1. Елементи земного магнетизму.

Проекції Bz і Bн індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі.

$$B_Z=\mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \varphi_м, \quad (1.1)$$

Горизонтальна складова

$$B_Н= \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \varphi_м, \quad (1.2)$$

де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

$\varphi_м$ – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора.

Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Побудована ймовірніша математична модель залежності магнітного моменту Землі від геомагнітної широти:

$$M=1{,}2190\cdot10^{-5}\varphi^3_м - 1{,}4404\cdot10^{-3}\varphi^2_м +2{,}8370\cdot10^{-2}\varphi_м +8{,}8028,$$

де $a=1{,}2190\cdot10^{-5}$; $b=- 1{,}4404\cdot10^{-3}$; $c=2{,}8370\cdot10^{-2}$; $d=8{,}8028$.

2. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
3. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги при розрахунку за виведеного формулою становить 0,11 значень геомагнітного моменту, визначаємого за виведеною формулою, а відносна похибка становить 1,3%
4. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a $m_a=2.05\cdot10^{-6}$
5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b $m_b=2.81\cdot10^{-4}$
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c $m_c=1.04\cdot10^{-2}$
7. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d $m_d=0.11$
8. Побудована математична модель приймається за істинну модель, на основі якої генеруються істинні похибки і будуються спотворені моделі для подальших досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. З метою раціоналізації проведення математичної обробки спотворених моделей для дослідження

точності визначення геомагнітного моменту Землі проведені дослідження при введенні коефіцієнта К в

Відносна похибка у відсотках $\Delta_{відн.}\%=\Delta_{відн.}\cdot 100\%=1,3\%$.

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a=\mu\sqrt{\frac{1}{Pa}}=\mu\sqrt{\frac{1}{[x^3x^3\cdot 3]}}=0,11\sqrt{\frac{1}{2,89\cdot 10^9}}=2,05\cdot 10^{-6}$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d=\mu\sqrt{\frac{1}{Pd}}=\mu\sqrt{\frac{1}{[x^0x^0\cdot 3]}}=0,11\sqrt{\frac{1}{1,165}}=0,11$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c

$$\frac{Pc}{[xx\cdot 2]}=\frac{Pd}{[x^0x^0\cdot 2]};\quad Pc=Pd\frac{[xx\cdot 2]}{[x^0x^0\cdot 2]};\quad [x_0x_0\cdot 2]=[x^0x^0]-\frac{[x^3x^0][x^3x^0]}{[x^3x^3]}-$$

$$-\frac{[x^2x^0\cdot 1][x^2x^0\cdot 1]}{[x^2x^2\cdot 1]}=$$ 9-3.7578328-2.6470602=2.595107 (див. строчки 12,13,14 ІІ схеми Гаусса.)

$$m_c=\mu\sqrt{\frac{1}{Pc}}=0,11\sqrt{\frac{1}{110,658}}=1,04\cdot 10^{-2},$$

де $Pc=\frac{1,164\cdot 246,56}{2,595}=110,658$.

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$[x^3x^3\cdot 2]=[x^3x^3]-\frac{[x^0x^3][x^0x^3]}{[x^0x^0]}-\frac{[x^2x^3\cdot 2][x^2x^3\cdot 2]}{[x^2x^2\cdot 2]}=9,061\cdot 10^{11}-3,783\cdot 10^{11}-4,349\cdot 10^{11}$$

$$=9,28\cdot 10^{10}$$

$$m_b=\mu\sqrt{\frac{1}{Pb}}=2,81\cdot 10^{-4};$$

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування земної кулі

$$B_т=\sqrt{B_z^2+B_н^2} \qquad (1.3)$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати

$$B_т=\sqrt{\mu_0^2\,\frac{M^2}{4\pi^2R^6}\left(\sin^2\varphi_м+\frac{\cos^2\varphi_м}{4}\right)}\ ,\ \text{або}$$

$$B_т=\mu_0\,\frac{M}{2\pi R^3}\sqrt{\frac{4\sin^2\varphi_м+\cos^2\varphi_м}{4}}\ .$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, а $4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=3\sin^2\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$, отримаємо

$$B_т=\mu_0\,\frac{M}{4\pi R^3}\sqrt{3\sin^2\varphi_м+1}, \qquad (1.4)$$

Знайдемо магнітний момент М із формули (1.4)

$$M=\frac{B_т\,4\pi R^3}{\mu_0\sqrt{3\sin^2\varphi_м+1}} \qquad (1.5)$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{екв.}=0,34$ ерстеда [3, -с.163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідуючу пропорцію

$$1\ \frac{а}{м} \text{ — } 4\pi 10^{-3}\ е,$$

$$H_{екв.} \text{ — } 0,34\ е,$$

Звідки

$$H_{екв.}=\frac{1\,а/м\cdot 0{,}34е}{4\pi 10^{-3}е}=27{,}05634033\ \frac{а}{м}$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H=\frac{B_т}{\mu_0}=\frac{M}{4\pi R^3}\sqrt{3\sin^2\varphi_м+1} \qquad (1.6)$$

Тоді загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

$$M=\frac{4\pi R^3\,H}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi_м}}. \qquad (1.7)$$

Для полюса $H_{пол.}$=0,66 ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1\,\frac{а}{м}\ \text{--------}\ 4\pi 10^{-3}е,$$

$$H_{пол.}\ \text{--------}\ 0{,}66\ е,$$

звідки

$$H_{пол.}=\frac{1\,\frac{а}{м}\ 0{,}66\ е}{4\pi 10^{-3}е}=52{,}52113122\ а/м.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{пол.}=\frac{H_{пол.}\ 4\pi R^3}{\sqrt{1+3\sin^2 90^\circ}}.$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000$м, а $4\pi R^3=3{,}249620751\cdot 10^{21}[м]^3\cdot$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{екв.}=\frac{3{,}249620751\cdot 10^{21}[м]^3\cdot 27{,}05634033[а/м]}{1}$$

де х – геомагнітна широта пункту спостереження, виражена в градусах.

7.7. Оцінка точності результатів

Вичислимо за формулою (7.11) значення M' і розрахуємо поправки

$$V_i=M_i-M'_i \qquad (7.12)$$

№п/п	X(град)	y=м·10²²	y'=м'·10²²	v=м-м'	v²
1	0,00	8,79	8,803	-0,013	0,000169
2	11,25	8,90	8,957	-0,057	0,003249
3	22,50	9,05	8,851	+0,199	0,039601
4	33,75	8,50	8,598	-0,088	0,007744
5	45,00	8,18	8,274	-0,094	0,008836
6	56,25	8,00	8,011	-0,011	0,000121
7	67,50	7,95	7,904	+0,046	0,002116
8	78,75	8,12	8,057	+0,063	0,003969
9	90,00	8,53	8,575	-0,045	0,002025
n=9		Σ	76,02·²10²	Σ0	0,06783

Для розрахунку M'i скористаємося програмою заключного контролю 5.

Таблиця 20. Порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

Середню квадратичну похибку одиниці ваги розрахуємо за формулою

$$\mu=\frac{\Sigma V^2}{n-к} \qquad (7.13)$$

де n – число вихідних параметрів x і y, к – степінь поліному. В нашому випадку

$$\mu=\sqrt{\frac{0{,}06783}{9-3}}\cdot 10^{22}=0{,}11\cdot 10^{22}ам$$

Гранична похибка

$\Delta гр.=2{,}5\mu=0{,}26\cdot 10^{22}ам$

Відносна похибка

$$\frac{\mu}{M_{середн.}} = \frac{0{,}11\cdot 10^{22}}{\frac{76{,}02\cdot 10^{22}}{9}} = 0{,}013$$

15. При даних умовах коефіцієнт $[x^{\circ}x^{\circ}\cdot 2]$ для визначення ваги Pb необхідно збільшити у $к^2$ разів.

$$[x^{\circ}x^{\circ}\cdot 2]_1=[x^{\circ}x^{\circ}\cdot 2]_к\cdot к^2=2{,}595\cdot 10^{-4}\cdot(100)^2=2{,}595$$

Теорема доказана

16. При даних умовах коефіцієнт $[x^2x^2\cdot 2]$ для визначення ваги Pc необхідно збільшити у $(к^2)^2$ раз.

$$[x^2x^2\cdot 2]_1=[x^2x^2\cdot 2]_к\cdot(к^2)^2=4{,}933\cdot 10^{-2}\cdot(100^2)^2= 4{,}933\cdot 10^{-2}\cdot 10^{8}=4{,}933\cdot 10^{6}$$

Теорема доказана

17. При даних умовах коефіцієнт $[x^3x^3\cdot 2]$ для визначення ваги Pc необхідно збільшити у $(к^2)^3$ раз

$$[x^3x^3\cdot 2]_1 = [x^3x^3\cdot 2]_к\cdot (к^2)^3= 9{,}2804 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2)^3 = 9{,}280 \cdot 10^{10}$$

Теорема доказана

В заключення відмітимо, що аналогічні дослідження були проведені при коефіцієнті масштабування, рівному 10, що абсолютно підтвердило дані твердження.

Крім рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса проводилось рішення на мікроЕОМ по розробленій автором програмі. Зведемо всі результати в таблицю 19.

Таблиця 19. Зведена таблиця результатів побудови математичної моделі.

№п/п	$a\cdot 10^{-5}$	$b\cdot 10^{-3}$	$c\cdot 10^{-2}$	d	Нк
1	1,2189811	-1,4403967	2,8370474	8,8028413	1:1
2	1,2190193	-1,4404495	2,8372336	8,8028306	1:1
3	1,2190462	-1,4404918	2,837416	8,8028145	1:1
4	1,2187907	-1,440119	2,83589	8,802912	1:1
5	1,2189736	-1,4403861	2,8370087	8,802838	1:100
6	1,2185367	-1,4397769	2,834832	8,802971	1:100
7	1,2190277	-1,4404609	2,8372721	8,8028286	1:100
8	1,2190915	-1,440566	2,837784	8,802769	1:100
модель	$1{,}2190\cdot 10^{-5}$	$-1{,}4404\cdot 10^{-3}$	$2{,}8370\cdot 10^{-2}$	8,8028	

На основі проведених досліджень отримана формула залежності магнітного моменту Землі від широти

$$Y=M=1{,}2190\cdot 10^{-5}x^3-1{,}4404\cdot 10^{-3}x^2+2{,}8370\cdot 10^{-2}x+8{,}8028. \qquad (7.11)$$

$$= 8{,}792284498\cdot 10^{22}а\cdot м^2.$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{пол.}=\frac{3{,}249620751\cdot 10^{21}\cdot 52{,}52113122}{2}$$

$$=8{,}533687894\cdot 10^{22}а\cdot м^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45°, прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^{\circ}}=\frac{H_{0^{\circ}}+H_{90^{\circ}}}{2}=\frac{0{,}34е+0{,}66е}{2}= 0{,}50е.$$

Тоді

$$1\,\frac{а}{м} \;\text{--------}\; 4\pi 10^{-3}е,$$

$$H_{45^{\circ}} \;\text{--------}\; 0{,}5е,$$

Звідки

$$H_{45^{\circ}}=\frac{1\,\frac{а}{м}\cdot 0{,}5е}{4\pi 10^{-3}е}= 39{,}78873577\,\frac{а}{м}.$$

Таким чином, магнітний момент $H_{45^{\circ}}$ буде

$$H_{45^{\circ}}=\frac{3{,}249620751\cdot 10^{21}[м]^3\cdot 39{,}78873577\,\frac{а}{м}}{\sqrt{1+3\sin^2 45^{\circ}}}$$

$$= =8{,}177542602\cdot 10^{22}а\cdot м^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти 22,5°

$$H_{22,5°}=\frac{0,34е+0,50е}{2}=0,42е,$$

для $\varphi_{маг.}=67,5°$

$$H_{67,5°}=\frac{0,50е+0,60е}{2}=0,58е.$$

І для $\varphi_{маг.}=22,5°$

$$1\,\frac{а}{м}\quad\text{--------}\quad 4\pi 10^{-3}е,$$

$$H_{22,5°}\quad\text{--------}\quad 0,42е.$$

Звідки

$$H_{22,5°}=\frac{1\,\frac{а}{м}\cdot 0,42е}{4\pi 10^{-3}е}=33,422538\,\frac{а}{м},$$

і по аналогії

$$H_{67,5°}=\frac{1\,\frac{а}{м}\cdot 0,58е}{4\pi 10^{-3}е}=46,1549335\,\frac{а}{м}.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$M_{22,5°}=\frac{3,249620751\cdot 10^{21}\ м^3\cdot 33,422538\,\frac{а}{м}}{\sqrt{1+3\sin^2 22,5°}}$$

$$=9,052956514\cdot 10^{22}а/м$$

$$M_{67,5°}=\frac{3,249620751\cdot 10^{21}\ м^3\cdot 46,1549335\,\frac{а}{м}}{\sqrt{1+3\sin^2 67,5°}}$$

тому що

$$b_1=\frac{-1,4404\cdot 10^{-1}}{100}=-1,4404\cdot 10^{-3}$$

Теорема 2 доказана.

3. При даних умовах отриманий коефіцієнт с при х залишається без змін

$c_1=c_{100}=2,840\cdot 10^{-3}$

Теорема 3 доказана.

4.При даних умовах коефіцієнт d залишається без змін

$d_1=d_{100}=+8,80284$

Теорема 4 доказана

5.При даних умовах вагу останнього невідомого Pa необхідно збільшити у $(к^2)^3$ разів.

Дійсно

$Pa_1=Pa_к\cdot(к^2)^3=Pa_{100}\cdot(100^2)^3=2,890\cdot 10^{-3}\cdot(100^2)^3=2,890\cdot 10^9$

Теорема 5 доказана.

6.При даних умовах вагу Pd коефіцієнта d необхідно збільшити у $к^2$ разів

$Pd_1=Pd_к\cdot к^2=Pd_{100}\cdot 100^2=1,164\cdot 10^{-4}\cdot 100^2=1,164$

Теорема 6 доказана

7.При даних умовах коефіцієнт [xx·2] для визначення ваги Pb необхідно збільшити у $(к^2)$ разів.

Дійсно

$[xx \cdot 2]_1 = [xx \cdot 2]_к \cdot (к^2) = 2{,}465 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2) = 2{,}465 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 2{,}465 \cdot 10^2 = 246{,}5$

Теорема доказана

Таким чином із вищесказаного видно, що коефіцієнти необхідно зменшувати в К раз. Тоді будуть виконуватися і проміжні контролі і зручно оперувати з такими числами.

Але при цьому необхідно знати лише ключ переходу від зрівноважених параметрів з коефіцієнтом К.

7.6. Встановлення ключа переходу. Порівняльний аналіз.

Таблиця 18. Зведена таблиця результатів зрівноваження при К=1 і К=100

№п/п	1: к	a	B	c	d	Pa	Pd
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1:1	$1{,}2190 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}4404 \cdot 10^{-3}$	$2{,}8370 \cdot 10^{-3}$	+8,80284	$2{,}890 \cdot 10^{9}$	1,164
2	1:100	$1{,}2190 \cdot 10^{-1}$	$-14404 \cdot 10^{-1}$	$2{,}840 \cdot 10^{-3}$	+8,80284	$2{,}890 \cdot 10^{-3}$	$1{,}164 \cdot 10^{-4}$
3	1:1	$a_{100}/к^2$	$b_{100}/к^2$	$b_1 = b_{100}$	$d_1 = d_{100}$	$Pa_1 = Pa_{100} \cdot (к^2)^3$	$Pd_1 = Pd_{100} \cdot к^2$

Продовження таблиці 18

№п/п	1: к	$[xx \cdot 2]$	$[x^\circ x^\circ \cdot 2]$	$[x^2x^2 \cdot 2]$	$[x^3x^3 \cdot 2]$
1	2	9	10	11	12
1	1:1	246,5651	2,59511	4933573	$9{,}28044 \cdot 10^{10}$
2	1:100	$2{,}465 \cdot 10^{-2}$	$2{,}59511 \cdot 10^{-4}$	$4{,}933 \cdot 10^{-2}$	$9{,}28043 \cdot 10^{-2}$
3	1:1	$[xx \cdot 2]_{100} \cdot к^2$	$[x^\circ x^\circ : 2]_{100} \cdot к^2$	$[x^2x^2 \cdot 2]_{100} \cdot (к^2)^2$	$[x^3x^3 \cdot 2]_{100} \cdot (к^2)^3$

Із результатів зрівноваження, проведених в табл..18 випливає

1. Якщо в початкових умовах рівняннях зменшити значення вихідних параметрів x і y в к разів, то отриманий коефіцієнт a при x^3 із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у $к^2$ разів, тобто

$$a_1 = \frac{a_к}{к^2}$$

Дійсно, в нашому випадку

$$a_1 = \frac{a_{100}}{100^2} = \frac{1{,}2190 \cdot 10^{-1}}{100^2} = 1{,}2190 \cdot 10^{-5}$$

Теорема 1 доказана.

2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при x^2 необхідно зменшити в к разів

$$b_1 = \frac{b_к}{к}$$

$= 7{,}948506716 \cdot 10^{22} а \cdot м^2$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведемо в табл.1.

Таблиця 1. залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№ п/п	φмаг.= x (градуси)	Y=M= =f(x) (а/м)	Δ
1	0,00	$8{,}79 \cdot 10^{22}$	+0,11
2	11,25	$8{,}90 \cdot 10^{22}$	+0,15
3	22,50	$9{,}05 \cdot 10^{22}$	-0,45
4	33,75	$8{,}50 \cdot 10^{22}$	-0,32
5	45,00	$8{,}18 \cdot 10^{22}$	-0,18
6	56,25	$8{,}00 \cdot 10^{22}$	-0,05
7	67,50	$7{,}59 \cdot 10^{22}$	+0,17
8	78,75	$8{,}12 \cdot 10^{22}$	+0,41
9	90,00	$8{,}53 \cdot 10^{22}$	
n=9		$\sum 76{,}02 \cdot 10^{22}$	

Згідно формули (1.7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля, також залежить від широти.

На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного поля від широти, що не потребувало б знання магнітного моменту і навпаки.

Тому, безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі від геомагнітної широти.

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах 0°, 22,5°, 45°, 67,5° і 90°, побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде

кубічний поліном, тобто

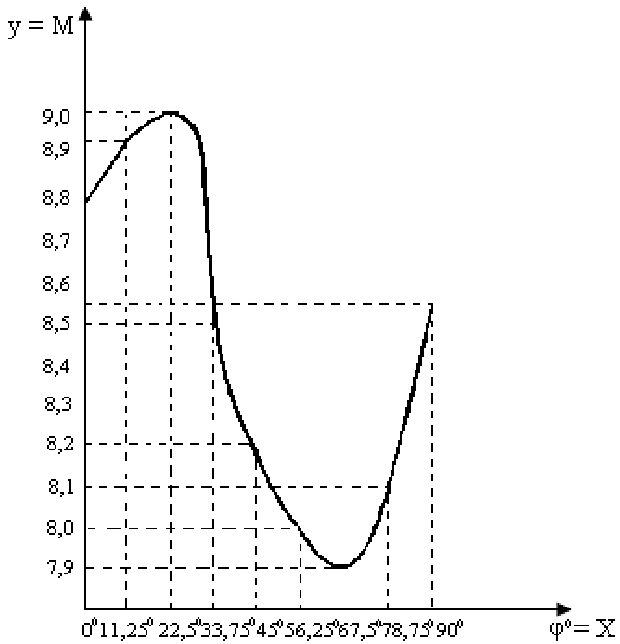

Рис.1 Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції вид у

$$y = ax^3 + вx^2 + cx + d. \quad (1.8)$$

Невідомі коефіцієнти a, в, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в 11,5°; 33,75°; 56,25° і 78,75° визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови ймовірнішої моделі. побудовану таким чином ймовірнішу модель залежності кулі від широти в подальшому приймемо за істинну модель, і генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність

визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

У зв'язку з переходом від дванадцятизначних цілих чисел до дробових замітна втрата точності при діленні їх і подальшому оперуванні з дробовими числами. Тому для виконання контролю в 5 стрічці необхідно число 119032,5 множити не на фактичне число -1,0123344 із шостої стрічки стовпчика сум, яке втратило точність, а на контрольну суму -1,0257643.

Тоді, 119032,5·(-1,0257643)=-122099,28 і його записуємо у дев'яту стрічку стовпчика сум. Якщо цього (втрати точності) не враховувати, то замість правильного числа 122099,28 отримаємо неправильне число 120500,69, різниця яких буде 1598,59 і про подальші контролі, які базуються на попередніх вже не може бути і мови.

Але навіть і в цьому випадку контрольне число десятої стрічки стовпчика сум +110,72 не дорівнює контрольному 93,03154. Знайдемо яке ж має бути число замість взятого нами контрольного -1,0257643,

Тоді,

((110,72-93,03154)+122099,28)/22116,97 =1,0259128.

Тобто, замість числа 1,0257643 необхідно взяти число 1,0259128. Різниця ж цих чисел 0,0001485 лежить за межами точності даного конкретного випадку.

Фактично можемо вважати, що розрахунки за схемою Гаусса в нашому конкретному випадку забезпечують точність до чотирьох значущих цифр після коми.

Але контролі нам потрібні не для виконання процедури контролів, а для контролю рішення системи нормальних рівнянь. Заключний же контроль вирішує проблему всіх проміжних контролів в цілому. А заключні контролі і по першій і по другій схемах Гаусса виконуються добре.

Таблиця 15. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса)

№п/п		x°]d	x]c	x²]b	x³]a	y]	s]	контроль
1	[x°	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6	
2		-1	-45	-2868,7501	-205031,25	+8,4466666	-207937,51	-207937,55
3	[x		25818,751	1845281,3	$1,4051048\cdot10^{8}$	-3352,5	$1,4237862\cdot10^{8}$	
4			-18225	-1161843,8	-83037656	+3420,9	-84214691	
5			+7593,751	+683437,5	+57472820	+68,4	+58163930	+58163920
6			-1	-89,999988	-7568,4362	$-9,0074062\cdot10^{-3}$	-7659,4465	-7659,4452
7	[x²			$1,4051048\cdot10^{8}$	$1,1132236\cdot10^{10}$	-212938,88	$1,1274353\cdot10^{10}$	
8				-74067544	$-5,2936507\cdot10^{9}$	+218082,38	$-5,3686867\cdot10^{9}$	
9				-61509367	$-5,1925531\cdot10^{9}$	-6155,9992	$-5,234753\cdot10^{9}$	
10			[x² x²·2]=	+4933573	$+6,660319\cdot10^{8}$	-1012,5	$+6,70913\cdot10^{8}$	$6,7096\cdot10^{8}$
11				-1	-134,9999	+2,0522651	-135,98927	135,999
12	[x³				$9,0612411\cdot10^{11}$	-15240713	$9,1737977\cdot10^{11}$	
13				[x³ x³·2]=	$-3,7834033\cdot10^{11}$	+15586476	$-3,8370319\cdot10^{11}$	
14					$-4,3497937\cdot10^{11}$	-517681,04	$-4,4020999\cdot10^{11}$	
15			[x³ x³·2]		$-8,9914239\cdot10^{10}$	+136687,4	$-9,0573191\cdot10^{10}$	
16			Pa=	[x³ x³·3]=	$+2,890171\cdot10^{9}$	-35230,64	$+2,8934\cdot10^{9}$	$+2,890\cdot10^{9}$
17					-1	$+1,2189811\cdot10^{-5}$	-1,0011172	0,9999878
18		+8,446666	$-9,0074062\cdot10^{-3}$	$+2,0522651\cdot10^{-4}$	$+1,2189811\cdot10^{-5}$			
19		-205031,250	-7568,4362·a	-134,9999a	a			
20		-2868,7501 b	-89,999988·b	$-1,4403667\cdot10^{-3}$				
21		-45c	$+2,8370474\cdot10^{-2}$	b				
22		+8,8028413	c					
23		d						

7.5. Рішення нормальних рівнянь по другій системі Гаусса

Як і раніше, з метою визначення ваг коефіцієнтів d і c переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d був на останньому місці, а коефіцієнт c в передостанньому стовпчику перед стовпчиком вільних членів.

Таблиця 16. Коефіцієнти нормальних рівнянь для другої схеми Гаусса

	x³]	x²]	x]	x°]	y]	s]	контроль
[x³	$9,0612411\cdot10^{11}$	$1,1132236\cdot10^{10}$	$1,4051048\cdot10^{8}$	1845281,3	-15240713	$9,1738346\cdot10^{11}$	
[x²		$1,4051048\cdot10^{8}$	1845281,3	25818,751	-212938,88	$1,1274353\cdot10^{10}$	
[x			25818,751	405	-3352,5	$1,4237864\cdot10^{8}$	
[x°				9	-76,02	1871437,6	

Таблиця 17. Рішення нормальних рівнянь (друга система Гаусса)

№п/п		x³]a	x²]b	x]c	x°]d	y	s	контроль
1	[x³	$9,0612411\cdot10^{11}$	$1,1132236\cdot10^{10}$	$1,4051048\cdot10^{8}$	1,845281,3	-15240713	$9,1738346\cdot10^{11}$	
2		-1	$-1,2285553\cdot10^{-2}$	$-1,5506758\cdot10^{-4}$	$-2,0364553\cdot10^{-6}$	$+1,6819674\cdot10^{-5}$	-1,0124558	-1,0124558
3	[x²		$1,4051048\cdot10^{8}$	1845281,3	25818,751	-212938,88	$1,1274353\cdot10^{10}$	
4			$-1,3676567\cdot10^{8}$	-1726248,8	-22670,301	+187240,58	$-1,1270562\cdot10^{10}$	
5	Σ	[x²x²·1][bb1]	3744810	119032,5	+3148,45	-25698,3	3791000	3841292,7

6			-1	$-3,1785991\cdot10^{-2}$	$-8,4075026\cdot10^{-4}$	$+6,8623776\cdot10^{-3}$	-1,0123344	-1,0257643
7	[x			25818,751	405	-3352,5	$1,4237864\cdot10^{8}$	
8				-2,1788,62	-286,14331	+2363,3404	$-1,4225643\cdot10^{8}$	
9				-3783,56598	-100,07661	+816,84596	-122099,28	
10	Σ		[xx·2]=	+246,5651	+18,78008	-172,31364	+110,72	93,03154
11				-1	$-7,6166821\cdot10^{-2}$	$+6,9885656\cdot10^{-1}$		-0,3773102
12	[x°				9	-76,02	1871437,6	
13				[x°x°·2]=	-3,7578328	+31,037029	-1868210,3	
14					-2,6470602	+21,605853	-3230,0351	
15			[x°x°·2]=		-1,4304186	+13,124582	-7,0859157	
16	Σ			Pd=[x°x°·3]=	+1,1646884	+10,252536	-9,8210157	-9,087848
17					-1	+8,8028145	+8,4323	+7,8028145
18		$+1,6819674\cdot10^{-5}$	$+6,8623776\cdot10^{-3}$	$+6,9885656\cdot10^{-1}$	+8,8028145			
19		$-2,0364553\cdot10^{-6}$d	$-8.4075026\cdot10^{-4}$ d	$-7,6166821\cdot10^{-2}$ d	d			
20		$-1.5506758\cdot10^{-4}$ c	$-3.1785991\cdot10^{-2}$c	$+2,837416\cdot10^{-2}$				
21		$-1.2285553\cdot10^{-2}$b	$-1.4404918\cdot10^{-3}$	c				
22		$+1.2190462\cdot10^{-5}$	B					
23		a						

2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО

Приведемо програму генерування випадкових чисел на мові BASIC

Програма №1. Генерування випадкових чисел на BASIC

```
10   PRINT «Генератор випадкових чисел в діапазоні від –M до +M»
20   INPUT «Введіть середню квадратичну похибку вимірів і їх число», M; N
30   DIM   Z (N)
40   X = -M; Y = +M; PRINT “M =”; M : PRINT “N =”; N
50   FOR I = 1 то N
60   Z (I) = ((Y-X)*RND (I) +X)
70   PRINT USING “Z” (# # .) = # # # . # # ; I; Z(I)
80   NEXT I
90   END
```

Таблиця 2. Істинні похибки при M=1

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
00	+0,43	+0,37	-0,04	+1,00	+0,29	-0,74	-0,26	+0,17	-0,73	+0,87
10	-0,56	-0,38	-0,53	+0,79	+0,17	-0,08	-0,99	+0,65	-0,95	-0,25
20	+0,01	+0,10	+0,77	-0,28	+0,64	+0,75	-0,17	+0,42	-1,00	+0,20
30	-0,04	+0,53	-0,81	+0,09	+0,76	+0,65	-0,64	+0,06	-0,65	-0,60

Для знаходження середніх квадратичних похибок з точністю 0,1 необхідно дані табл..2 помножити на 0,1, тобто перенести кому на один знак вліво. При генеруванні похибок з точністю 0,05 необхідно дані табл..1 помножити на 0.05.

Заслуговує уваги генерування псевдо випадкових чисел, роз приділених за нормальним законом

$$P(X)=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (2.1)$$

Значення $\Delta 2_{i-1}$, $\Delta 2_i$ генеруються із ζ_i (i=1,2,3…) за формулами

$$\Delta 2_{i-1}=(-2\ln\zeta_i)^{1/2}\cos(e^9\zeta_i), \qquad (2.2)$$

$$\Delta 2_i=(-2\ln\zeta_i)^{1/2}\sin(e^9\zeta_i). \qquad (2.3)$$

Значення ζ_i виробляються за допомогою лінійного методу

$$\zeta_i+1=F\,(11\,\zeta_i+\pi), \qquad (2.4)$$

де F(z) дробна частина від z.

Проведемо програму генерування псевдо випадкових чисел по даній методиці на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61».

Програма №2. генератор випадкових чисел.

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	кпх4	Fπ	пхd	пх4	:	+	к{x}	хпd	9	Fe^9
10	х	хпс	Fcos	пхd	Fx²	FlnX	/-/	F√	хпb	х
20	с/п	пхс	Fsin	пхв	х	с/п	БП	оо	F	АВТ

В регістрах 4 і d зберігаються проміжні результати слідуючих значень Δi, тому ці регістри не можна використовувати для других цілей. Перемикач Р/Г встановлюється в положення Р. Розрахунки проводяться в слідуючому порядку:

0,011 хп4 0,3 хпd В/О с/п - 0,5816с/п 1.1933…

Таблиця №3. Псевдо випадкові числа для дослідження спотвореної моделі

	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	-0,58	+1,19	-0,16	+0,23	+0,20	+1,19	+0,89	+0,64	-0,75
10	-1,09	-1,59	+0,11	+0,09	-0,91	-1,61	-1,67	+0,30	-0,69
20	+0,35	+0,30	-1,53	+0,93	-0,23	+0,19	-0,12	-0,54	-0,19

Дані значення пропорційно зменшуються або збільшуються в залежності від точності, яку ми беремо за основу при побудові даної конкретної математичної моделі, попередньо визначивши середню квадратичну похибку для

$$[x^3x^3\cdot 2]_{1:1}=[x^3x^3\cdot 2]_{1:к}\cdot(к^2)^3 \qquad (7.10)$$

7.3. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для доказу сформульованих теорем знайдемо коефіцієнти нормальних рівнянь при к=1, тобто значення параметрів х:у не масштабували.

Таблиця 13. Знаходження коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№п/п	X=φ°	Y=M·10²²	x°	x²	x³	s	x³x³	x³x²	x³x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00	8,79	1	0	0	-7,79	0	0	0
2	11,25	8,90	1	126,5625	1423,8281	1553,7406	2027286,4	180203,24	16018,066
3	22,50	9,05	1	506,25	11390,625	11910,875	$1,2974633\cdot10^{8}$	5766503,9	256289,06
4	33,75	8,50	1	1139,0625	38443,359	39608,672	$1,4778919\cdot10^{9}$	43789388	1297463,3
5	45,00	8,18	1	2025,00	91125	93187,82	$8,3037656\cdot10^{9}$	$1,8452813\cdot10^{8}$	4100625
6	56,25	8,00	1	3164,0625	177978,52	181191,83	$3,1676353\cdot10^{10}$	$5,6313516\cdot10^{8}$	10011292
7	67,50	7,95	1	4556,25	307546,88	312163,68	$9,4585083\cdot10^{10}$	$1,4012605\cdot10^{9}$	20759414
8	78,75	8,12	1	6201,5625	488373,05	496646,24	$2,3850824\cdot10^{10}$	$3,028676\cdot10^{9}$	38459377
9	90,00	8,53	1	8100	729000	737182,47	$5,31441\cdot10^{11}$	$5,9049\cdot10^{9}$	65610000
n=9	405	76,02	9	25818,751	1845281,3	1871437,6	$9,0612411\cdot10^{11}$	$1,1132236\cdot10^{10}$	$1,4051048\cdot10^{8}$

Продовження таблиці 13

№п/п	X=φ°	Y=M·10²²	x³y	x³s	x²y	x²s	xy	xs
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	8,79	0	0	0	0	0	0
2	11,25	8,90	12672,07	2212259,5	1126,4063	196392,16	100,125	17479,581
3	22,50	9,05	103085,16	$1,3567231\cdot10^{8}$	4581,5625	6029095,7	203,625	267994,68
4	33,75	8,50	326768,55	$1,5226904\cdot10^{9}$	9682,0312	45114474,8	286,875	1336792,7
5	45,00	8,18	745402,5	$8,4917401\cdot10^{9}$	16564,5	$1,8870129\cdot10^{8}$	368,1	4193451,9
6	56,25	8,00	1423828,2	$3,22478253\cdot10^{10}$	25312,5	$5,7329594\cdot10^{8}$	450	10192040
7	67,50	7,95	2444997,7	$9,6004965\cdot10^{10}$	36222,188	$1,4222867\cdot10^{9}$	536,625	21071048
8	78,75	8,12	3965589,2	$2,4157189\cdot10^{11}$	50356,688	$3,0675672\cdot10^{9}$	639,45	38953391
9	90,00	8,53	6218370	$5,3740602\cdot10^{11}$	69093	$5,9711618\cdot10^{9}$	767,7	66346422
n=9	405	76,02	15240713	$9,1738344\cdot10^{11}$	212938,88	$1,1274353\cdot10^{10}$	3352,5	$1,4237862\cdot10^{8}$

7.4. Рішення нормальних рівнянь (перша схема Гаусса)

Зведемо обчислені в табл..13 коефіцієнти у трикутну матрицю для рішення нормальних рівнянь

Таблиця 14. Коефіцієнти нормальних рівнянь для першої схеми Гаусса

	$x^\circ]$	$x]$	$x^2]$	$x^3]$	$y]$	$s]$	контроль
$[x^\circ$	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6	1871438,1
$[x$		25818,751	1845281,3	$1,4051048\cdot10^{8}$	-3352,5	$1,4237862\cdot10^{8}$	$1,4237864\cdot10^{8}$
$[x^2$			$1,4051048\cdot10^{8}$	$1,1132236\cdot10^{10}$	-212938,88	$1,1274353\cdot10^{10}$	$1,1274405\cdot10^{10}$
$[x^3$				$9,0612411\cdot10^{11}$	-15240713	$9,1737977\cdot10^{11}$	$9,1738346\cdot10^{11}$

$$a_{1:1}= a_{1:к}:к^2= \frac{a_{1:к}}{к^2}, \qquad (7.1)$$

Теорема 2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при x^2 необхідно зменшити в К разів (у нашому випадку в 100 разів)

$$b_{1:1}= \frac{b_{1:к}}{к}. \qquad (7.2)$$

Теорема 3. При даних умовах, отриманий коефіцієнт с при х залишається без змін, тобто

$$C_{1:1}=C_{1:к} \qquad (7.3)$$

Теорема 4. При даних умовах, отриманий коефіцієнт d залишається без змін, тобто

$$d_{1:1}=d_{1:к} \qquad (7.4)$$

Теорема 5. При даних умовах вагу Ра необхідно збільшити у $(к^2)^3$ разів, тобто

$$Pa_{1:1}=Pa_{1:к}(к^2)^3 \qquad (7.5)$$

Теорема 6. При даних умовах вагу Pd коефіцієнта d необхідно збільшити у $к^2$ разів, тобто

$$Pd_{1:1}=Pd_{1:к}\cdot к^2 \qquad (7.6)$$

Теорема 7. При даних умовах коефіцієнт $[xx\cdot2]$ для визначення ваги Pb необхідно збільшити у $(к^2)$ разів, тобто

$$[xx\cdot2]_{1:1}= [xx\cdot2]_{1:к}(к^2) \qquad (7.7)$$

Теорема 8. При даних умовах коефіцієнт $[x^\circ x^\circ\cdot2]$ для визначення ваги Pb слід збільшити у $к^2$ разів, тобто

$$[x^\circ x^\circ\cdot2]_{1:1}=[x^\circ x^\circ\cdot2]_{1:к}\cdot к^2 \qquad (7.8)$$

Теорема 9. При даних умовах коефіцієнт $[x^2x^2\cdot2]$ для визначення ваги Рс необхідно збільшити у $(к^2)^2$ раз, тобто

$$[x^2x^2\cdot2]_{1:1}=[x^2x^2\cdot2]_{1:к}\cdot(к^2)^2 \qquad (7.9)$$

Теорема 10. При даних умовах коефіцієнт $[x^3x^3\cdot2]$ для визначення ваги Рс необхідно збільшити у $(к^2)^3$ разів, тобто

даного конкретного числа похибок.

Методика пропорційного розрахунку псевдо випадкових чисел буде приведена нижче.

3.Побудова створеної моделі

Будувавши ймовірнішу модель по способу найменших квадратів, приймаємо її за істинну модель, адже у неї задовольняються всі умовні рівняння з одного боку, і встановлений функціональний зв'язок між параметрами X і Y – з другого.

В залежності від мети досліджень, задаємося нормативним значенням середньої квадратичної похибки визначення геомагнітної широти X=φ, генеруємо випадкові числа, які б в цілому відповідали нормативній точності, і спотворюємо істинну модель цими похибками.

Зрівноваживши спотворену модель, отримуємо математичну модель, робимо оцінку точності елементів зрівноваженої моделі і встановлюємо відповідність похибок визначення магнітного моменту земної кулі.

Непарні моделі будуть генерувати істинну похибку 0,05°, а парні 0,1°.

Сучасні калькулятори мають «вшиті» генератори для генерування випадкових чисел від 0 до 1. але вони генерують числа тільки зі знаком «плюс». Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо випадкових) чисел ξi натиском клавіш К, С4, розраховують середнє арифметичне генерованих псевдо випадкових чисел ξcp

$$\xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi i}{n}, \qquad (3.1)$$

де n – число випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення похибок Δi за формулою

$$\Delta i' = \xi_i - \xi_{cp}. \qquad (3.2)$$

3. Знаходиться середня квадратична похибка попередніх істинних похибок за формулою Гаусса

$$m'\Delta_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta i'}{n}}. \qquad (3.3)$$

4. Вичисляють коефіцієнт пропорційності К для визначення істинних похибок необхідної точності

$$K = \frac{C}{m'\Delta}, \qquad (3.4)$$

де С – необхідна нормована константа.

Так, наприклад, при $m'\Delta i = 0{,}283$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю С = 0,1, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0{,}1}{0{,}283} = 0{,}353,$$

а при С = 0,05, отримаємо $K_{0,05} = 0{,}177$.

7. Встановлення ключа переходу для зрівноважених коефіцієнтів математичної моделі і їх ваг при зменшених значеннях X і Y

7.1. Постановка проблеми досліджень.

При оперуванні великими числами X і Y коефіцієнти нормальних рівнянь набувають великих значень, особливо при підведенні їх до шостої, п'ятої степені, а при одночасному опрацюванню їх з коефіцієнтами, вираженими в долях одиниці різко знижується точність результатів. Тому, доцільно перед початком опрацювання матеріалів зменшити значення X і Y у К разів. Таким шляхом ми і пішли, зменшивши значення X і Y у 100 раз. Провівши строге зрівноваження по способу найменших квадратів, і виконавши заключні контролі, ми впевнимося у правильності і коректності виконаної процедури строгого зрівноваження.

Але, на жаль, ми не можемо скористатися цими результатами строгого зрівноваження для знаходження дійсних значень у за дійсними значеннями х по отриманій формулі. Тому, нам необхідно встановити ключ переходу від результатів зрівноваження зі зменшеними параметрами X і Y до їх реальних значень.

Крім цього встановлений ключ переходу нам дасть можливість проведення широкомасштабних досліджень на спотворених математичних моделях по способу статистичних випробувань Монте Карло.

7.2. Формулювання теорем переходу.

Теорема 1. Якщо в початкових умовних рівняннях зменшити значення вихідних параметрів X і Y в К разів, (у нашому випадку у 100 разів) то, отриманий коефіцієнт а при x^3 із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити в 100^2 разів, тобто при коефіцієнті переходу К

Перед розрахунком по програмі слід ввести число рівнянь в регістр 0, тобто пхпо; після набирають перший коефіцієнт в/о с/п. послідовно набираючи всі коефіцієнти і вільні члени (знаки вільних членів з правої сторони рівності (зі знаком «плюс»)). В кінці розрахунку одержують пхd-к1; пхс-к2; пхb-к3; пха-к4. Результати індукуються на дисплеї через натиск клавіші с/п. в новому рахунку обнулити всі оператори.

В результаті рішення системи нормальних рівнянь (5.3) отримали

пхd=8,8028286; пхс=+0,028372721;

пхb=-0,14404609; пха=0,12190277

тобто

$y=0{,}12190277x^3-0{,}14404609x^2+0{,}028372721x+8{,}8028286.$

При рішенні другої системи рівнянь виду (4.14)

пхd=0,12190915; пхс=-0,1440566; пхb=+0,02837784; пха=8,802769

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta i = \Delta i' \cdot K \qquad (3.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки mΔ генерованих істинних похибок Δ

$$m\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^2}{n}}, \qquad (3.6)$$

і порівняння

$$m\Delta = C.$$

Таблиця №4.Генерування псевдо випадкових чисел і розрахунок істинних похибок.

№ п/п	ξi	- ξср.	Δi′	Δi′²	Δi0,1= 0,353Δi′	Δi²0,1	Δi0,05= 0,177Δi′	Δi²0,05
1	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
2	0,87	-0,53	+0,34	0,1156	+0,12	0,0144	+0,06	0,0036
3	0,50	-0,53	-0,03	0,0009	-0,01	0,0001	-0,01	0,0001
4	0,17	-0,53	-0,36	0,1296	-0,13	0,0169	-0,06	0,0036
5	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
6	0,91	-0,53	+0,38	0,1444	+0,13	0,0169	+0,06	0,0036
7	0,73	-0,53	+0,20	0,04	+0,07	0,0049	+0,03	0,0009
8	0,69	-0,53	+0,16	0,0256	+0,06	0,0036	+0,03	0,0009
9	0,14	-0,53	-0,39	0,1521	-0,14	0,0196	-0,07	0,0049

n=9	∑4,81	-4,77	+0,04	0,642	0	0,0814	0	0,0184

Середнє арифметичне генерованих випадкових чисел

$$\xi_{ср.}=\frac{\sum_{i=1}^{9}\xi_i}{9}=\frac{4,81}{9}=0,5344\approx 0,53.$$

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$m\Delta'_i=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}\Delta'^2_i}{n-1}}=\sqrt{\frac{0,642}{8}}=0,283.$$

Коефіцієнт пропорційності

$$K=\frac{C}{m\Delta'_i}=\frac{0,1}{0,283}=0,353.$$

при генеруванні випадкових похибок з точністю 0,1 і K=0,05/0,283 = 0,177 при генеруванні похибок з точністю 0,05. Розраховуються істинні похибки $\Delta_{i0,1}=0,353\Delta'_i$ і $\Delta_{i0,05}=0,177\Delta'_i$.

Середня квадратична похибка при генеруванні з точністю 0,1

$$m_{\Delta 0,1}=\sqrt{\frac{0,084}{8}}=0,100.$$

Середня квадратична похибка при генеруванні чисел з точністю 0,05

$$m_{\Delta 0,05}=\sqrt{\frac{0,0184}{8}}=0,0479\approx 0,05.$$

Таблиця №5. Побудова спотвореної моделі при Δ=0,1 і Δ=0,05

№п/п	φi=xi істинна	y′=M=f(x) модель	модель при Δφ=0,1°	Δ=0,1M	модель при Δφ=0,05°	Δ=0,05 M
1	0,00	8,803	-0,05	-0,05	-0,02	-0,02
2	11,25	8,957	+0,12	11,37	+0,06	11,31
3	22,50	8,851	-0,01	22,49	-0,01	22,49
4	33,75	8,598	-0,13	33,62	-0,06	33,69
5	45,00	8,274	-0,05	44,95	-0,02	44,98
6	56,25	8,011	+0,13	56,38	+0,06	56,31
7	67,50	7,904	+0,07	67,57	+0,03	67,53
8	78,75	8,057	+0,06	78,81	+0,03	78,78
9	90,00	8,575	-0,14	89,86	-0,07	89,93
n=9	∑405,00	$76,02\cdot 10^{12}$	0	∑405,00	0	∑405

наприклад, з’являється 0,2185367, набирається 0,90612409 с/п … В кінці з’являється контрольне значення 0,15240713.

Таким чином, в результаті рішення другої схеми Гаусса ми отримали другу формулу кубічного полінома

$$y=0,12185367x^3-0,14397769x^2+0,02834832x+8,802971. \quad (6.5)$$

Хоча у цих двох схемах Гаусса ми рішали одну і ту ж систему рівнянь з абсолютно однаковими коефіцієнтами, але поміняними строчками і членами в строчках, із сумісного рішення цих рівнянь ми отримали коефіцієнти, які дещо відрізняються між собою. Але дані коефіцієнти повністю задовольняють ці рівняння і добре задовольняють заключні контролі. Це говорить про те, що ми абсолютно коректно виконали процедуру строгого зрівноваження.

Розходження в коефіцієнтах говорить про наявність в системі істинних залишкових похибок, які не в змозі повністю бути компенсованими процедурою строгого зрівноваження по способу найменших квадратів. Адже зрівноваження по способу найменших квадратів дає лише узгодження умовних рівнянь. Але при цьому ще залишаються істинні похибки, які із сумісного рішення систем рівнянь і дають такі розходження в коефіцієнтах.

В подальшому дані рівняння рішались на мікроЕОМ.

Програма №6. Рішення систем лінійних рівнянь при n≤4

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хп4	1	4	Хп2	пхо	хп1	с/п	пх4	:	кхп2
10	FL1	06	1	4	хпз	пхо	хп1	FL1	23	кпх3
20	с/п	БП	19	Сх.	кхп2	FL1	24	кхп2	пхо	пх2
30	+	хп1	хп2	Пх3	-	Fx≠0	42	с/п	пп	84
40	БП	28	кпхо	пхо	хпз	с/п	кпх2	-	хп4	с/п
50	кпх2	-	пх4	:	кхп1	FL3	49	пх1	пхо	+
60	хп3	1	4	Хп1	хп2	кпх1	/−/	пп	84	пхз
70	+	хпз	пх1	-	Fx=0	65	пхо	хп1	кпх3	кпх2
80	FL1	78	БП	12	пхо	↔	В↑	кпхз	х	кпх1
90	+	кхп2	FO	FL0	86	FO	хпо	в/о	пхс	с/п
100	пхв	с/п	пха	с/п						

$$d=\frac{[x^{o}y\cdot 3]}{[x^{o}x^{o}\cdot 3]}, \qquad (6.1)$$

$$c=-\frac{[xy\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}-\frac{[xx^{o}\cdot 2]}{[xx\cdot 2]}\cdot d, \qquad (6.2)$$

$$b=-\frac{[x^{2}y\cdot 1]}{[x^{2}x^{2}\cdot 1]}-\frac{[x^{2}x^{o}\cdot 1]}{[x^{2}x^{2}\cdot 1]}\cdot d-\frac{[x^{2}x^{2}\ 1]}{[x^{2}x^{2}\ 1]}\cdot c, \qquad (6.3)$$

$$a=-\frac{[x^{3}y]}{[x^{3}x^{3}]}-\frac{[x^{3}x^{o}]}{[x^{3}x^{3}]}\,d-\frac{[x^{3}x]}{[x^{3}x^{3}]}\,c-\frac{[x^{3}x^{2}]}{[x^{3}x^{3}]}\,b. \qquad (6.4)$$

При цьому коефіцієнт d виписується безпосередньо із 17 строчки d=+8,802971.

Із одинадцятої строчки

$c=0{,}69881804-7{,}6164027\cdot 10^{-2}\cdot 8{,}802971=0{,}02834832.$

Із шостої строчки

$b=+0{,}68623987-0{,}084074998\cdot 8{,}802971-3{,}1785937\cdot 0{,}02834832$ $=-0{,}14397703$

Із другої строчки

$a=0{,}16819675-0{,}020364553\cdot 8{,}802971-1{,}5506759\cdot 0{,}02834832-$ $1{,}2285553(-0{,}14397769)=0{,}16819675$

Заключний контроль зручно виконувати по програмі №5.

Програма №5. Заключний контроль рішення нормальних рівнянь.

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Сх	хпе	с/п	хпо	хпd	0	с/п	кхпо	пхо	1
10	-	Fx=0	06	пхd	хпо	кпхо	с/п	х	пхе	+
20	хпе	пхо	1	-	Fx=0	15	пхе	с/п	Сх	хпе
30	БП	13	F	АВТ						

Після натиску клавіш в/о с/п вводиться число визначених коефіцієнтів, збільшених на одиницю n+1 і після через натиск клавіші с/п вводяться послідовно визначені коефіцієнти зліва на право а с/п b с/п с с/п d с/п.

Автоматично на дисплеї з’являється визначений коефіцієнт, набирається відповідний коефіцієнт нормального рівняння і натискується клавіша с/п,

4. Представлення системи нормальних рівнянь.

Для визначеності положимо, що маємо ряд результатів залежності геомагнітного моменту земної кулі У=М від широти Х=φ, виражених в числовій формі, функціональну залежність між якими нам необхідно виразити за допомогою полінома степені К, де коефіцієнти аі являються не відомими.

Тоді система початкових рівнянь (система рівнянь похибок) може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned}
&a_1x_1^{k}+a_2x_1^{k-1}+a_3x_1^{k-2}+\ \dots\ +a_kx_1+a_{k+1}x_1^{o}-y_1=V_1,\\
&a_1x_2^{k}+a_2x_2^{k-1}+a_3x_2^{k-2}+\ \dots\ +a_kx_2+a_{k+1}x_2^{o}-y_2=V_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4.1)\\
&a_1x_k^{k}+a_2x_k^{k-1}+a_3x_k^{k-2}+\ \dots\ +a_kx_k+a_{k+1}x_k^{o}-y_k=V_k,\\
&a_1x_{k+1}^{k}+a_2x_{k+1}^{k-1}+a_3x_{k+1}^{k-2}+\ \dots\ +a_kx_{k+1}+a_{k+1}x_{k+1}^{o}-y_{k+1}=V_{k+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_1x_n^{k}+a_2x_n^{k-1}+a_3x_n^{k-2}+\ \dots\ +a_kx_n+a_{k+1}x_n^{o}-y_n=V_n.
\end{aligned}$$

Помноживши кожну строчку цієї системи відповідно на x_1^{k}, x_2^{k},…, x_n^{k} і склавши їх між собою, отримаємо

$$a_1[x^{k}x^{k}]+a_2[x^{k-1}x^{k}]+a_3[x^{k-2}x^{k}]+\dots+a_k[xx^{k}]+a_{k+1}[x^{o}x^{o}]-[yx^{k}]=[vx^{k}]; \quad (4.2)$$

де символом [ ] позначені суми (за Гауссом).

Після помножимо кожну строчку системи (4.1) на $x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}$.

Додавши, будемо мати

$$a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1}x^{k-1}] + a_3[x^{k-2}x^{k-1}] + \ldots + a_k[x x^{k-1}] + a_{k+1}[x^o x^{k-1}] - [y x^{k-1}] = [v x^{k-1}]. \quad (4.3)$$

Продовжуючи і дальше такі перетворення за допомогою послідовного множення строчок (4.1) відповідно на $X_i^{k-2}, X_i^{k-3}, \ldots, X_i^o$ і їх додавання отримаємо ще К-1

аналогічних рівнянь.

В результаті будемо мати систему із К+1 перетворених рівнянь з К+1 невідомими.

$$a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1}x^k] + \ldots + a_{k+1}[x^o x^k] - [y x^k] = [v x^k];$$

$$a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1}x^{k-1}] + \ldots + a_{k+1}[x^o x^{k-1}] - [y x^{k-1}] = [v x^{k-1}];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.4)$$

$$a_1[x^k x^o] + a_2[x^{k-1}x^o] + \ldots + a_{k+1}[x^o x^o] - [y x^o] = [v x^o];$$

Розглядаючи цю систему, бачимо, що якщо прирівняти нулю ліві частини складаючих її рівнянь, то вона буде повністю співпадати із системою нормальних рівнянь, відрізняючись від неї тільки послідовністю строчок і членів в строчках.

Докажемо, що дійсно

$$[VX^k] = [VX^{k-1}] = \ldots = [VX^o] = 0. \quad (4.5)$$

Для цього помножимо кожну строчку (4.1) відповідно на $V_1, V_2, \ldots, V_n$ і результат просумуємо

$$a_1[x^k v] + a_2[x^{k-1}v] + \ldots + a_{k+1}[x^o v] - [yv] = [vv] \quad (4.6)$$

Із умови способу найменших квадратів

$$[VV] = \min, \quad (4.7)$$

положеного в основу визначення невідомих коефіцієнтів, слідує рівність нулю суми частинних похідних (4.7) по невідомим коефіцієнтам

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial a_i} = 2\,[V \cdot \frac{\partial v}{\partial a}] = 0 \quad (4.8)$$

В розгорнутому вигляді після скорочення на 2 це можна записати так

$$V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_1} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_1} + \ldots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_1} = 0,$$

$$V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_2} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_2} + \ldots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_2} = 0, \quad (4.9)$$

коефіцієнт с в передостанньому стовпчику перед стовпчиком вільних членів. Другими словами, нам необхідно рішити систему нормальних рівнянь.

$$[x^3x^3]a + [x^2x^3]b + [xx^3]c + [x^\circ x^3]d - [x^3y] = 0,$$

$$[x^2x^3]a + [x^2x^2]b + [xx^2]c + [x^\circ x^2]d - [x^2y] = 0,$$

$$[xx^3]a + [xx^2]b + [xx]c + [x^\circ x]d - [xy] = 0,$$

$$[x^\circ x^3]a + [x^\circ x^2]b + [x^\circ x]c + [x^\circ x^\circ]d - [x^\circ y] = 0.$$

Таблиця 10. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	x³]	x²]	X]	x°]	Y]	S]	Заключний контроль
[x³	0,90612409	1,1132236	1,4051048	$1{,}8452813\cdot10^{-2}$	-0,15240713	3,2904983	0,15240713
[x²		1,4051048	1,8452813	$2{,}581875\cdot10^{-2}$	-0,21293888	4,1764895	0,21293897
[x			2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	0,33524999
[x°				0,0009	-0,007602	$7{,}8069564\cdot10^{-2}$	0,007602
Коеф.	$+1{,}2185367\cdot10^{-1}$	$-1{,}4397769\cdot10^{-1}$	$+2{,}834832\cdot10^{-2}$	+8,802971			
	a	b	C	d			

Таблиця 11. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса).

№п/п		x³]a	x²]b	x]c	x°]d	y	∑	контроль
1	[x³	0,90612409	1,1132236	1,4051048	$1{,}8452813\cdot10^{-2}$	-0,15240713	3,2904983	
2		-1	-1,2285553	-1,5506759	$-2{,}0364553\cdot10^{-2}$	$+1{,}6819675\cdot10^{-1}$	-3,6313991	-3,6313989
3	[x²		1,4051048	1,8452813	$2{,}581875\cdot10^{-2}$	$-2{,}1293888\cdot10^{-1}$	4,1764895	
4			-1,3676567	-1,726249	$-2{,}2670301\cdot10^{-2}$	+0,18724059	-4,0425591	
5			0,0374481	0,1190323	$+3{,}148449\cdot10^{-3}$	$-2{,}569838\cdot10^{-2}$	+0,1339304	+0,13393047
6			-1	-3,1785937	$-8{,}4074998\cdot10^{-2}$	+0,68623987	-3,576427	-3,576428
7	[x			2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	
8				-2,1788621	$-2{,}8614331\cdot10^{-2}$	$+2{,}3633406\cdot10^{-1}$	-5,1024963	
9				$-3{,}7835531\cdot10^{-1}$	$-1{,}000764\cdot10^{-2}$	$+8{,}1684701\cdot10^{-2}$	$-4{,}2571033\cdot10^{-1}$	
10			[xx²]=	$2{,}465769\cdot10^{-2}$	$1{,}878029\cdot10^{-3}$	$-1{,}7231239\cdot10^{-2}$	$+9{,}3045\cdot10^{-3}$	$+9{,}3045\cdot10^{-3}$
11				-1	$-7{,}6164027\cdot10^{-2}$	$+6{,}9881804\cdot10^{-1}$	$-3{,}7734678\cdot10^{-1}$	$-3{,}77346\cdot10^{-1}$
12	[x°				0,0009	-0,007602	$7{,}8069564\cdot10^{-2}$	
13					$-3{,}7578328\cdot10^{-4}$	$+3{,}1037031\cdot10^{-3}$	$-6{,}7009528\cdot10^{-2}$	
14					$-2{,}6470584\cdot10^{-4}$	$2{,}1605912\cdot10^{-3}$	$-1{,}1260198\cdot10^{-2}$	
15			[x°x°·2]=	$2{,}595118\cdot10^{-4}$	$-1{,}4303825\cdot10^{-4}$	$1{,}3124005\cdot10^{-3}$	$-7{,}0866819\cdot10^{-4}$	
16			[x°x°·3]=	Pd=	$1{,}1647263\cdot10^{-4}$	$-1{,}0253052\cdot10^{-3}$	$-9{,}0883015\cdot10^{-4}$	$-9{,}08832\cdot10^{-4}$
17					-1	-8,802971	+7,8034658	+7,803
18		0,16819675	0,68623987	0,69881804	+8,802971			
19	d·	$-2{,}0364553\cdot10^{-2}$	-0,084074998d	-0,076164027d	d			

20	c·	-1,5506759	-3,1785937c	+0,02834832				
21	b·	-1,2285553	-0,14397769	C				
22		+0,12185367	b					
23		a						

Останній контроль в даній схемі говорить, що похибка можлива у четвертій значущій цифрі. Це визвано діленням на число 0,00011647263. У заключних контролях найбільше розходження у сьомій значущій цифрі після коми говорить про цілком надійні і добрі результати.

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d розраховуються за слідуючими формулами, які приводяться в позначеннях Гаусса

6.Рішення нормальних рівнянь

Таблиця 9. Перша схема Гаусса.

№ п/п		x°]d	x]c	x²]b	x³]a	y	∑	контроль
1	[x°	0,0009	0,0405	2,5818751·10⁻²	1,8452813·10⁻²	-0,7602·10⁻²	7,8069564·10⁻²	
2		-1	-44,999999	-28,6875	-20,503125	8,4466665	-86,743959	-86,743957
3	[x		2,5818751	1,8452813	1,4051048	-0,33525	5,5375111	
4			-1,8225	-1,1618438	-0,83037656	3,4208999·10⁻¹	-3,5131303	
5	∑		0,7593751	0,6834375	0,5747283	6,83999·10⁻³	2,0243808	2,0243809
6			-1	-0,89999984	-0,75684372	-9,0073926·10⁻³	-2,6658507	-2,6658509
7	[x²			1,4051048	1,1132236	-0,21293888	4,1764895	
8				-0,74067541	-0,52936507	0,21808238	-2,2396207	
9				-0,61509364	-0,51725538	-6,1559899·10⁻³	-1,8219423	
10	∑		[x²x²·2]=	4,933576·10⁻²	6,660312·10⁻²	-1,0124899·10⁻³	0,1149265	0,11492639
11				-1	-1,3499968	2,0522434·10⁻²	-2,3294766	-2,3294744
12	[x³				0,90612409	-0,15240713	3,2904983	
13					-3,7834033·10⁻¹	1,5586476·10⁻¹	-1,6006701	
14					-4,349795·10⁻¹	-5,1768034·10⁻³	-1,5321398	
15			[x³x³·2]=	9,280426·10⁻²	-8,9913998·10⁻²	1,3668581·10⁻³	-1,5515041·10⁻¹	
16	∑		[x³x³·3]=	Pa=	2,890262·10⁻³	-3,523153·10⁻⁴	0,002538	0,0025379467
17					-1	1,2189736·10⁻¹	-0,87812107	-0,87810
18		8,4466665	-9,0073926·10⁻³	2,0522434·10⁻²	0,12189736			
19	ax	-20,503125a	-0,75684372a	-1,3499968a	a			
20	bx	-28,6875b	-0,89999984b	-0,14403861				
21	cx	-44,999999	0,028370087	b				
22		8,802838	C					
23		d						

Коефіцієнт a=+0,12189736 виписуємо безпосередньо із схеми Гаусса (див.17 строчку).

Коефіцієнт b розраховується на основі даних 11 строчки

b=-1,3499968·0,12189736+0,020522434=-0,14403861.

Коефіцієнт c розраховується на основі даних 6 строчки

c=-0,89999984 b-0,75684372a-9,0073926·10⁻³=+0,0028370087.

Коефіцієнт d розраховується на основі даних 2 строчки

d =-44,999999 c-28,6875 b-20,503125a+8,4466665=+8,802838.

Визначені коефіцієнти a, b, c, d виписуються у відповідний стовпчик таблиці коефіцієнтів нормальних рівнянь і виконується заключний контроль по приведеним вище формулам.

По дані схемі Гаусса можна визначити обернені ваги останнього a і передостаннього b коефіцієнтів для розрахунку точності зрівноважених елементів.

З метою визначення обернених ваг коефіцієнтів d і c, переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d був на останньому місці, а

$$V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} + \ldots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = 0.$$

Це і є система нормальних рівнянь, витікаючи із (4.6).

Але із (4.1) слідує

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_1} = X_1^k; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_1} = X_2^k, \ldots, \frac{\partial V_n}{\partial a_1} = X_n^k,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_2} = X_1^{k-1}; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_2} = X_2^{k-1}, \ldots, \frac{\partial V_n}{\partial a_2} = X_n^{k-1}, \qquad (4.10)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} = X_1^0; \quad \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} = X_2^0, \ldots, \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = X_n^0.$$

Підставляючи ці значення в (4.9), будемо мати

$$\begin{aligned} &[VX^k] = 0, \\ &[VX^{k-1}] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &[VX^\circ] = 0. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Таким чином, система нормальних рівнянь буде мати вигляд

$$a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1} x^k] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [yx^k] = 0$$

$$a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1} x^{k-1}] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [yx^{k-1}] = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.12)$$

$$a_1[x^k x^q] + a_2[x^{k-1} x^q] + \ldots + a_{k+1}[x^0 x^q] - [yx^q] = 0;$$

Для поліному виду (1.1) система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} &dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] = 0; \\ &d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] = 0; \\ &d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] = 0; \qquad (4.13) \\ &d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] = 0. \end{aligned}$$

При проведенні досліджень нам буде необхідно представити систему (4.13) у вигляді

$$\begin{aligned} &a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] = 0; \\ &a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] = 0; \\ &a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] = 0; \qquad (4.14) \\ &a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] = 0. \end{aligned}$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (4.13) і (4.14) одним із відомих в математиці способів.

В даній роботі ми будемо рішати систему нормальних рівнянь по системі Гаусса послідовного виключення невідомих і як контрольне рішення буде виконано на мікроЕОМ по розробленій автором програмі.

На основі проведених розрахунків сформуємо систему нормальних рівнянь, загальний вигляд яких буде

$$\begin{aligned} &na_0 + a_1[x] + a_2[x^2] + \ldots + a_m[x^m] - [y] = 0, \\ &a_0[x] + a_1[x^2] + a_2[x^3] + \ldots + a_m[x^{m+1}] - [xy] = 0, \\ &a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \ldots + a_m[x^{m+2}] - [x^2y] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.15) \\ &a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \ldots + a_m[x^{2m}] - [x^my] = 0. \end{aligned}$$

представлених в числовому виді (5.3) отримаємо рівняння

$y= 0{,}12189736x^3 - 0{,}14403861x^2 + 0{,}028370087x + 8{,}802838$

що і являється математичною моделлю залежності магнітного моменту планети Земля від широти пункту спостереження.

Оцінимо якість рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса за формулами заключного контролю (5.5)

$0{,}0009\cdot 8{,}802838+0{,}0405\cdot 0{,}028370087+2{,}5818751\cdot 10^{-2}\cdot(-0{,}14403861)+1{,}8452813\cdot 10^{-2}\cdot\cdot 0{,}12189736=0{,}007602;$

$0{,}0405\cdot 8{,}802838+2{,}581875\cdot 0{,}028370087+1{,}8452813\cdot(-0{,}14403861)+1{,}4051248\cdot 0{,}12189736=0{,}33525;$

$2{,}5818751\cdot 10^{-2}\cdot 8{,}802838+1{,}8452813\cdot 0{,}028370087+1{,}4051048\cdot(-0{,}14403861)+1{,}1132236\cdot 0{,}12189736=0{,}2129387;$

$1{,}8452813\cdot 10^{-2}\cdot 8{,}802838+1{,}4051048\cdot 0{,}028370087+1{,}1132236\cdot(-0{,}14403861)+0{,}90612409\cdot 0{,}12189736=0{,}15240703.$

Як бачимо, в контрольних рівняннях забезпечується чітко точність в шість значущих цифр після коми, що говорить про коректність і вірність рішення.

$0,0009d + 0,0405c + 2,5818751\cdot10^{-2}в + 1,8452813\cdot10^{-2}a - 07,602\cdot10^{-3} = 0,$

$0,0405d + 2,5818751c + 1,8452813в + 1,4051048a – 0,33525 = 0,$

$0,025818751d + 1,8452813c + 1,4051048в + 1,1132236a – 0,21293888 = 0,$

$0,018452813d + 1,4051048c + 1,1132236в + 0,90612409a – 0,15240713 = 0.$ **(5.3)**

Сформуємо таблицю коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Таблиця 8. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	x°]	x]	x²]	x³]	Y]	S]	Контроль
[x°	0.0009	0.0405	$2.5818751\cdot10^{-2}$	$1.8452813\cdot10^{-2}$	$-7.602\cdot10^{-3}$	$7.8069564\cdot10^{-2}$	$7.8069564\cdot10^{-2}$
[x		2.5818751	1.8452813	1.4051048	-0.33525	5.5375111	5.5375112
[x²			1.4051048	1.1132236	-0.21293888	4.1764895	4.1764897
x³				0.90612409	-0.15240713	3.2904983	3.2904981
коеф	8.802838	0.028370087	-0.14403861	0.12189736			
	d	c	b	a			

Виконання контрольних рівнянь сум

$[x°x°] + [x°x] + [x°x^2] + [x°x^3] - [x°y] = [x°s],$

$[x°x] + [xx] + [xx^2] + [xx^3] - [xy] = [xs],$

$[x°x^2] + [xx^2] + [x^2x^2] + [x^2x^3] - [x^2y] = [x^2s],$ (5.4)

$[x°x^3] + [xx^3] + [x^2x^3] + [x^3x^3] - [x^3y] = [x^3s].$

І в нашому випадку

$0,0009+0,0405+2,5818751\cdot10^{-2}+1,8452813\cdot10^{-2}-7,602\cdot10^{-3} =7,8069564$

$0,0405+2,5818751+1,8452813+1,4051048-0,33525=5,5375112$

$2,5818751\cdot10^{-2}+1,8452813+1,4051048+1,1132236-0,21293888 =4,1764897$

$1,8452813\cdot10^{-2}+1,4051048+1,1132236+0,90612409-0,15240713 = 3,2904981$

В дальнійшому приступають до розв'язання системи рівнянь

$[x°x°]d + [x°x]c + [x°x^2]b + [x°x^3]a - [x°y] = 0,$

$[x°x]d + [xx]c + [xx^2]b + [xx^3]a - [xy] = 0,$

$[x°x^2]d + [xx^2]c + [x^2x^2]b + [x^2x^3]a - [x^2y] = 0,$ (5.5)

$[x°x^3]d + [xx^3]c + [x^2x^3]b + [x^3x^3]a - [x^3y] = 0.$

Після рішення системи нормальних рівнянь (5.5),

5.Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для того, щоб не було великих значень коефіцієнтів зменшимо значення X і Y в 100 раз, відповідно в 100 раз зменшимо значення вільних членів.

Таблиця 6. Обчислювальна таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№ п/п	X	Y	X°	X²	X³	S	X³X³	X³X²	X³X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	0,0879	0,01	0	0	-0,0779	0	0	0
2	0,1125	0,0890	0,01	$1,265625\cdot10^{-2}$	$1,423828\cdot10^{-2}$	$4,758008\cdot10^{-2}$	$2,0272864\cdot10^{-6}$	$1,8020324\cdot10^{-5}$	$1,6018066\cdot10^{-4}$
3	0,225	0,0905	0,01	$5,0625\cdot10^{-2}$	$1,1390625\cdot10^{-2}$	$2,0651563\cdot10^{-1}$	$1,2974633\cdot10^{-4}$	$5,7665039\cdot10^{-4}$	$2,5628906\cdot10^{-3}$
4	0,3375	0,0850	0,01	$1,1390625\cdot10^{-1}$	$3,8443359\cdot10^{-2}$	$4,1484961\cdot10^{-1}$	$4,3789388\cdot10^{-3}$	$4,3789388\cdot10^{-3}$	$1,2974634\cdot10^{-2}$
5	0,45	0,0818	0,01	$2,025\cdot10^{-1}$	$9,1125\cdot10^{-2}$	$6,71825\cdot10^{-1}$	$8,3037656\cdot10^{-3}$	$1,8452813\cdot10^{-2}$	$4,100625\cdot10^{-2}$
6	0,5625	0,0800	0,01	$3,1640625\cdot10^{-1}$	$1,7797852\cdot10^{-1}$	$9,868848\cdot10^{-1}$	$3,1676353\cdot10^{-2}$	$5,6313516\cdot10^{-2}$	$1,0011292\cdot10^{-1}$
7	0,6750	0,0795	0,01	$4,55625\cdot10^{-1}$	$3,0754688\cdot10^{-1}$	1,3686719	$9,4585083\cdot10^{-2}$	$1,4012605\cdot10^{-1}$	$2,0759414\cdot10^{-1}$
8	0,7875	0,0812	0,01	$6,2015625\cdot10^{-1}$	$4,8837305\cdot10^{-1}$	1,8248293	$2,3850824\cdot10^{-1}$	$3,028676\cdot10^{-1}$	$3,8459378\cdot10^{-1}$
9	0,900	0,0853	0,01	0,81	0,729	2,3637	$5,31441\cdot10^{-1}$	$5,9049\cdot10^{-1}$	0,6561
n=9	∑ 4,05	0,7602	0,09	2,5818751	1,8452813	7,8069563	0,90612409	1,1132236	1,4051048

Продовження таблиці 6.

№ п/п	X	Y	X³ Y	X³ S	X² Y	X² S	XY	XS
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	0,0879	0	0	0	0	0	0
2	0,1125	0,0890	$1,267207\cdot10^{-4}$	$6,7745854\cdot10^{-5}$	$1,1264063\cdot10^{-3}$	$6,0218538\cdot10^{-4}$	$1,00125\cdot10^{-2}$	$5,352759\cdot10^{-3}$
3	0,225	0,0905	$1,0308516\cdot10^{-3}$	$2,352342\cdot10^{-3}$	$4,5815625\cdot10^{-3}$	$1,0454854\cdot10^{-2}$	$2,03625\cdot10^{-2}$	$4,6466016\cdot10^{-2}$
4	0,3375	0,0850	$3,2676855\cdot10^{-3}$	$1,5948212\cdot10^{-2}$	$9,6820312\cdot10^{-3}$	$4,7253963\cdot10^{-2}$	$2,86875\cdot10^{-2}$	$1,4001174\cdot10^{-1}$
5	0,45	0,0818	$7,454025\cdot10^{-3}$	$6,1220053\cdot10^{-2}$	$1,65645\cdot10^{-2}$	$1,3604456\cdot10^{-1}$	$3,681\cdot10^{-2}$	$3,023212\cdot10^{-1}$
6	0,5625	0,0800	$1,4238282\cdot10^{-2}$	$1,756443\cdot10^{-1}$	$2,53125\cdot10^{-2}$	$3,1225652\cdot10^{-1}$	$4,5\cdot10^{-2}$	$5,551227\cdot10^{-1}$
7	0,6750	0,0795	$2,4449977\cdot10^{-2}$	$4,2093077\cdot10^{-1}$	$3,6222188\cdot10^{-2}$	$6,2360113\cdot10^{-1}$	$5,36625\cdot10^{-2}$	$9,2385353\cdot10^{-1}$
8	0,7875	0,0812	$3,9655892\cdot10^{-2}$	$8,911745\cdot10^{-1}$	$5,035668\cdot10^{-2}$	1,1316793	0,063945	1,4370531
9	0,900	0,0853	0,0621837	1,7231373	0,069093	1,914597	0,07677	2,12733
n=9	∑ 4,05	0,7602	0,15240713	3,2904983	0,21293888	4,1764895	0,33525	5,5375111

Коефіцієнти нормальних рівнянь зручно розраховувати за розробленою автором програмою на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61 або 52». Програма вдосконалена у порівнянні з попередньою, представленою в математичній частині досліджень. В даній програмі визначаються параметри S, X^3S, X^2S, XS, чого немає в попередній.

Програма №3. Послідовний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хс/п	хпе	ус/п	х/пd	пхе	Fx²	хп2	с/п	пхе	х
10	хпз	с/п	пх2	+	пхе	+	пхd	-	0	·
20	0	1	+	Хп4	с/п	пх3	Fx²	с/п	пх3	пх2
30	х	с/п	пхз	пхе	х	с/п	пх3	пхd	х	с/п
40	пзх	пх4	х	с/п	пх2	пхd	х	с/п	пх2	пх4
50	х	с/п	пхе	пхd	х	с/п	пхе	пх4	х	с/п
60	0	БП	00	F	АВТ					

Натиснувши клавіші в/о с/п, набирають значення X_i, натискують клавішу с/п (пуск), набирають значення Y_i і с/п і послідовно зчитують з дисплея через натиск клавіші с/п x^2, x^3, s, x^6, x^5, x^4, x^3y, x^3s, x^2y, x^2 s, xy, xs.

Після через натиск клавіші с/п вводять нові параметри x, y … В регістрах пам'яті одного циклу зберігаються слідуючі дані: X в регістрі е, Y в регістрі d, x^2 в регістрі 2, x^3 в регістрі 3, S в регістрі 4.

Параметри S розраховують за формулою

$$S=X-Y+X^2+X^3-X^\circ. \qquad (5.1)$$

Якщо коефіцієнт не зменшують, то $X^\circ=1$, при зменшенні коефіцієнтів у 100 раз $X^\circ=0{,}01$. В програмі проставлена константа 0,01, тому що ми всі коефіцієнти зменшили в 100 раз. Якщо коефіцієнти не зменшують, то в 18 операторі ставлять 1, а в 19, 20 і 21 команду КНОП. При цьому нам необхідно буде зменшити коефіцієнти і вільні члени рівняння в 0,01 там де буде x°.

Коли немає необхідності заповнювати таблицю 6, розроблена програма №4 розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Програма №4. Повний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	с/п	хп1	с/п	хпо	Fx²	хп2	Fx²	хп4	пх2	х
10	пха	+	хпа	пх2	пхо	х	хп3	пх2	х	пх9
20	+	хп9	пхо	пхе	+	хпе	пх2	пх7	+	хп7
30	пх3	пх8	+	хп8	пх1	пх2	х	пхс	+	хпс
40	пх1	пх3	х	пхd	+	хпd	пх1	пх6	+	хп6
50	пх4	пх5	+	хп5	пхо	пх1	х	пхв	+	пхв
60	0	БП	00	пхе	с/п	пх6	с/п	пх7	с/п	пх8
70	с/п	пх5	с/п	пх9	с/п	пха	с/п	пхв	с/п	пхс
80	с/п	пхd	с/п	сх	хп5	хп6	хп7	хп8	хп9	хпа
90	хпв	хпс	хпd	хпе	00 БП	00	F	АВТ		

Після набору Y і с/п, X і с/п йде розрахунок по програмі до індикації 0. після, через натиск клавіші с/п послідовно вводять значення Y_i, X_i …

Провівши всі розрахунки, натиском клавіші безумовного переходу БП 62 с/п переходять до зчитування послідовно даних [x], [y], [x^2], [x^3], [x^4], [x^5], [x^6], [xy], [x^2y], [x^3y].

При збої програми потрібно обнулити суматори натиском клавіш БП 82 с/п.

Таблиця 7. Розподіл змінних

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
x	y	x^2	x^3	x^4	$\sum x^4$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum x^3$	$\sum x^5$	$\sum x^6$	$\sum xy$	$\sum x^2y$	$\sum x^3y$	$\sum x$

На основі даних табл.6 сформуємо перше нормальне рівняння виду

$$dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] = 0, \qquad (5.1)$$

І в нашому випадку перше контрольне рівняння суми.

$$[x^\circ x^\circ] + [x^\circ x] + [x^\circ x^2] + [x^\circ x^3] - [x^\circ y] = [x^\circ s]. \qquad (5.2)$$

Для включення даного рівняння в загальну систему нормальних рівнянь необхідно ліву і праву частину даного контрольного рівняння помножити на 0,01 у зв'язку з тим, що всі коефіцієнти ми зменшили в 100 раз, але в першому рівнянні необхідно врахувати квадратичний коефіцієнт [x°x°]

Таким чином на основі розрахункової таблиці 6 маємо перше контрольне рівняння сум

$0{,}09 + 4{,}05 + 2{,}5818751 + 1{,}8452813 – 0{,}7602 = 7{,}8069564$

Помноживши всі коефіцієнти на 0,01 отримаємо контрольну суму

$0{,}0009 + 0{,}0405 + 2{,}5818751 \cdot 10^{-2} + 1{,}8452813 \cdot 10^{-3} - 0{,}7602 \cdot 10^{-2} = 7{,}8069564 \cdot 10^{-2}$

Коефіцієнти всіх остальних нормальних рівнянь змін не зазнають.

Таким чином, в результаті розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь ми отримали слідуючу систему нормальних рівнянь.

Літнарович Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ КАРЛО

Частина 1

Комп’ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у редакторі Microsoft office 2003:
Дзюбишина Галина Василівна
Дзюбишина Наталія Василівна

Міжнародний Економіко-Гуманітарний університет
ім..акад. С.Дем’янчука
33027, м. Рівне, вул. акад. С.Дем’янчука, 4